

International Academy of Education  
International Bureau of Education

*Douglas A. Grouws &  
Kristin J. Cebulla*

**POBOLJŠANJE USPJEHA UČENIKA  
IZ MATEMATIKE**

Na bosanski jezik preveo: Ismet Botonjić  
JU Pedagoški zavod Unsko-sanskog kantona,  
Bihać, Bosna i Hercegovina

EDUCATIONAL PRACTICES SERIES - 4

---

## **Međunarodna akademija za obrazovanje**

Međunarodna Akademija za obrazovanje (IAE) je neprofitna znanstvena asocijacija koja promovira istraživanja u obrazovanju, njihova širenja, i implementaciju implikacija tih istraživanja. Osnovana 1986. godine, Akademija je posvećena jačanju doprinosa istraživanja, rješavanju kritičnih obrazovnih problema širom svijeta, i ponudi bolje komunikacije među kreatorima politike, istraživačima i praktičarima. Sjedište Akademije je pri Kraljevskoj Akademiji za nauku, književnost i umjetnost u Briselu, Belgija, a njen koordinirajući centar je na Curtin Univerzitetu za tehnologiju u Perth-u, Australija.

Generalni cilj IAE je da se stimulira školska izvrsnost na svim poljima obrazovanja. U tom cilju, Akademija povremeno nudi sinteze rezultata od međunarodnog značaja zasnovanih na istraživanju. Akademija također nudi kritičke osvrte na istraživanja, njihovu osnovanost, i njihovu primjenu u obrazovnoj politici.

Sadašnji članovi Odbora direktora Akademije su:

- Erik De Corte, Univerzitet iz Leuven-a, Belgija (Predsjednik);
- Herbert Walberg, Univerzitet Illinois u Čikagu, Sjedinjene Američke Države (Potpredsjednik);
- Barry Fraser, Univerzitet za tehnologiju, Curtin, Australija (Izvršni direktor);
- Jacques Hallak, UNESCO, Pariz, Francuska;
- Michael Kirst, Univerzitet Stanford, Sjedinjene Američke Države;
- Ulrich Teichler, Univerzitet iz Kassela, Njemačka;
- Margaret Wang, Temple Univerzitet, Sjedinjene Američke Države.

## Predgovor

Ovu knjižicu Međunarodna akademija za obrazovanje (IAE) je pripremila za uključivanje u Seriju obrazovnih praksa, a distribuiraju je Akademija i Međunarodni ured za obrazovanje (IBE). Kao dio svoje misije, Akademija povremeno obezbjeđuje sinteze istraživanja o obrazovnim temama od međunarodnog značaja. Ova knjižica je četvrta u seriji o obrazovnim praksama koje općenito poboljšavaju učenje.

Materijal je originalno pripremljen za *Priručnik o istraživanju o poboljšanju postignuća učenika*, koji je uredio Gordon Cawelti, a u drugom izdanju 1999. godine publikovao Educational Research Service (ERS). Priručnik, koji također uključuje poglavlja o temama kao što je: generičke prakse i nauka, je na raspolaganju kod ERS-e (2000 Clarendon Boulevard, Arlington, VA 22201-2908, Sjedinjene Američke Države; tel. (1) 800-791-9308, fax: (1) 800-791-9309; i web site: [www.ers.org](http://www.ers.org)).

ERS je neprofitna istraživačka fondacija. Vršiti istraživanja i prikuplja informacije za potrebe obrazovnih lidera i javnosti. Osnovana je 1973. godine, a njen rad sponzorira sedam organizacija: Američka asocijacija školskih administratora, Američka asocijacija školskog administrativnog osoblja, Asocijacija školskih biznis zvaničnika, Vijeće rukovodilaca školskih državnih službenika, Nacionalna asocijacija direktora osnovnih škola, Nacionalna asocijacija direktora srednjih škola i Nacionalna asocijacija školskih službi za odnose sa javnošću.

Kao potpredsjednik Akademije i urednik ove serije, zahvaljujem zvaničnicima ERS-e što su omogućili da IAE i IBE ovaj materijal adaptiran od *Priručnika* naprave dostupnim edukatorima širom svijeta.

Prvi autor ove brošure, Douglas A. Grouws, je profesor matematičkog obrazovanja na Univerzitetu Iowa. On je bio urednik *Priručnika o istraživanju o nastavi i učenju matematike* (Macmillan, 1992.) i objavio je veliki broj publikacija o istraživanjima o nastavi matematike. Prezentirao je svoje istraživačke radove u Australiji, Kini, Mađarskoj, Guamu, Indiji, Japanu, Meksiku, Tajlandu i Ujedinjenom Kraljevstvu. Vodio je nekoliko istraživačkih projekata za Nacionalnu naučnu fondaciju (NSF) i druge agencije u području rješavanja matematičkih problema i praksa nastave u razredu. Njegov sadašnji rad za NSF uključuje matematiku i tehnologiju. Svoj doktorat je dobio na univerzitetu Wisconsin.

Drugi autor, Kristin J. Cebulla, je student doktorskih studija iz oblasti matematičkog obrazovanja na Univerzitetu Iowa. Ona je prethodno predavala matematiku na višoj srednjoj školi. Prije nego što je počela raditi u nastavi, ona je radila kao hemijski inženjer istraživač. Svoj prvi naučni stepen iz matematike i hemijskog inženjerstva je stekla na Univerzitetu Notre Dame, a zvanje magistra je stekla na Univerzitetu Mississippi.

Principi opisani u ovoj knjižici su najvećim dijelom uzeti iz Sjedinjenih Američkih Država i drugih zemalja iz engleskog govornog područja. Druga istraživanja također imaju važne implikacije za nastavu matematike. Kao primjer se može navesti Realistično matematičko obrazovanje koje je inicirao H. Freudenthal, a od ranih 1970-ih razvijao Univerzitet Utrecht (Dordrecht, The Netherlands, Kluwer, 1991.). Drugi primjer je istraživanje o rješavanju problema koje je sumirano u knjizi koju su napisali L. Verschaffel, B. Greer, i E. De Corte – *Davanje smisla problemima riječi*, a koja je nedavno izašla (izdanje: Lisse, The Netherlands, Swets & Zeitlinger, 2000).

Službenici Međunarodne akademije za obrazovanje su svjesni da je ova knjižica bazirana na istraživanjima provedenim prvenstveno u ekonomski naprednim zemljama. Knjižica se, međutim, fokusira na aspekte učenja koji se čine univerzalnim u većini formalnih školskih sistema. Prakse se čine da mogu biti generalno primjenljive širom svijeta. Ipak, principi trebaju biti procijenjeni u odnosu na lokalne uslove i adaptirani u skladu sa njima. U svakom obrazovnom sistemu sugestije ili uputstva za praksu zahtijevaju osjetljivu i pažljivu primjenu i kontinuiranu evaluaciju.

HERBERT J. WALBERG  
urednik, IAE Serija obrazovnih praksa,  
Univerzitet Illinois, Chicago

# Sadržaj

Uvod, *strana 6*;

1. Prilika za učenje, *strana 9*;
  2. Fokusiranje na značenje, *strana 12*;
  3. Učenje novih koncepata i sposobnosti tokom rješavanja problema, *strana 13*;
  4. Povoljne prilike za oboje: za otkrivanje i za praksu, *strana 15*;
  5. Otvorenost prema učeničkim metodama rješavanja i učeničkoj interakciji, *strana 16*;
  6. Učenje u malim grupama, *strana 18*;
  7. Diskusija u čitavom razredu, *strana 20*;
  8. Značenje broja, *strana 21*;
  9. Konkretni materijali, *strana 23*;
  10. Učeničko korištenje kalkulatora, *strana 24*;
- Zaključci, *strana 26*.  
Dodatni resursi, *strana 29*;  
Literatura, *strana 32*.

Ovu publikaciju su 2000-te godine proizveli Međunarodna akademija za obrazovanje (IAE), Palais des Académies, 1, rue Ducale, 1000 Brussels, Belgija, i Međunarodni ured za obrazovanje (IBE), P.O. Box 199, 1211 Geneva 20, Švajcarska.

Ona je slobodno na raspolaganju i može se slobodno reproducirati i prevesti na druge jezike. Molimo da se IAE-i i IBE-i pošalje bilo koja publikacija koja reprodukuje ovaj tekst dijelom ili u cjelini. Ova publikacija je također na raspolaganju na internetu u štampanoj formi. Vidjeti:

**<http://www.ibe.unesco.org>**

ili

**<http://www.curtin.edu.au./curtin/dept/smec/iae>**

Autori su odgovorni za izbor i prezentaciju činjenica sadržanih u ovoj publikaciji i za u njoj izražena mišljenja, koja nisu obavezno mišljenja UNESCO/IBE-a i ne angažiraju Organizaciju. Upotrijebljene oznake i prezentacije materijala u ovoj publikaciji ne impliciraju izražavanje bilo kakvog mišljenja od strane UNESCO/IBE vezano za pravni status bilo koje zemlje, teritorije, grada ili područja, ili njihovih organa vlasti, niti što se tiče određivanja granica.

Štampano u Švajcarskoj, PCL, Lozana.

## Uvod

Ova knjižica ukratko prikazuje matematička poglavlja iz drugog izdanja knjige *Priručnik o istraživanju poboljšanja uspjeha učenika*, koju je izdala Služba za obrazovna istraživanja. Priručnik je baziran na ideji da se radi postizanja uspjeha napori za poboljšanje nastave moraju fokusirati na postojeću osnovu znanja uz poštivanje efikasnog podučavanja i učenja. Priručnik je posebno koncipiran da se školskim administratorima i nastavnicima pomogne da ostvare svoje uloge obrazovnih lidera tako što im se daje gotov izvor autoritativnih ali na iskustvu baziranih informacija o istraživanju o efikasnom podučavanju i učenju.

Prakse identificirane u ovoj knjižici odražavaju mješavinu nastalih strategija i praksa koje su dugo u upotrebi. Autori daju kratak prikaz istraživanja koja daju potporu svakoj od praksa, opisuju kako se ovo istraživanje može primijeniti u sadašnjoj praksi u razredu, te predlažu listu najvažnijih studija koje podupiru praksu. Na kraju se daje kompletna lista literature za čitaoce koji hoće da potpuniije prostudiraju i shvate navedene prakse.

U većini slučajeva, rezultati istraživanja o specifičnim nastavnim praksama pokazuju samo mala ili skromna napredovanja. U obrazovanju, mi trebamo razumjeti, pažljivo selektirati, i upotrijebiti kombinaciju nastavnih praksa koje zajedno povećavaju vjerovatnoću da se učenicima pomaže u njihovom učenju, znajući da te prakse nisu primjenljive uvijek, niti u svim razredima.

Najveća mogućnost poboljšanja učenja učenika se javlja tamo gdje škole implementiraju višestruke promjene u aktivnostima podučavanja i učenja koje se tiču svakodnevnog života učenika. Na primjer, ako je cilj da se unaprijede sposobnosti učenika da rješavaju znanstvene probleme, škola mora planirati da uvede edukaciju nastavnika za (1) korištenje pristupa o ciklusima učenja; (2) korištenje simulacija na kompjuterima; i (3) sistematične pristupe rješavanju problema. Za simultano planiranje edukacije i zadovoljenja drugih potreba sve tri ove promjene trebaju biti značajniji poduhvati, ali se treba ostvariti veliko očekivanje što se tiče poboljšanja kvalitete učeničkog rješavanja problema.

Nalazi istraživanja prezentirani u ovoj knjižici nude polaznu tačku za pravljenje opsežnih školskih planova za poboljšanje nastave matematike. Nastavnicima i rukovodiocima škola će neizbježno trebati vrijeme za buduće studije, diskusije i druga izlaganja radi određivanja koja posebna iskustva treba imati prije odlučivanja o njihovom uključivanju u svoje školske planove.

Treba prepoznati involviranu kompleksnost uspostavljanja baze znanja za poboljšanje postignuća učenika u njegovom radu u razredu. Kao što Dennis Sparks piše u svome poglavlju o razvoju osoblja u knjizi *Priručnik o istraživanju poboljšanja postignuća učenika*, škole i školske vlasti imaju odgovornost da uspostave kulturu u kojoj nastavnici mogu vršiti svoje profesionalne kompetencije, istražiti obećana iskustva i razmjenjivati informacije između sebe, uz stavljanje fokusa na konačan cilj razvoja osoblja – poboljšanje učenja učenika.

## **Poboljšanje efikasnosti nastavnika**

Tokom zadnje tri decenije dramatično se povećao broj izvedenih istraživačkih studija o nastavi matematike (Kilpatrick, 1992.). Rezultujuća istraživačka baza obuhvata širok djelokrug sadržaja obrazovanja, obrazovne nivoe i istraživačke metodologije. Rezultati ovih studija, zajedno sa relevantnim nalazima iz istraživanja u drugim domenima, kao što je spoznajna psihologija, su iskorišteni da se identificiraju uspješne strategije i prakse podučavanja.

Predavanje i učenje matematike su kompleksni zadaci. Efekat promjene same nastavne prakse na učenikovo učenje može biti težak za razabrati zbog istovremenih efekata i drugih nastavnih aktivnosti koje je prate i konteksta u kojem se nastava odvija.

Dakle, kada nastavnici nastoje da poboljšaju efikasnost svoje nastave kroz promjenu svoje nastavne prakse, oni trebaju pažljivo razmotriti kontekst nastave, uzimajući posebno u obzir tipove učenika koje oni podučavaju. I, nadalje, oni ne trebaju previše brzo procjenjivati rezultate svojih novih praksa. Procjena o podesnosti njihovih odluka ne može biti bazirana na samo jednom jedinom rezultatu. Ako rezultati nisu potpuno zadovoljavajući, nastavnici trebaju utvrditi okolnosti koje su možda umanjile uticaj praksa koje oni implementiraju. Na primjer, vrijednost nastavnika koji fokusira više pažnje na podučavanje o značenju može da se ne pokaže, ako se ocjenjivanje učenika koncentrira na učenje činjenica napamet i vješto korištenje samo određenih sposobnosti.

Kvalitet implementacije nastavne prakse također značajno doprinosi njenom uticaju na učenikovo učenje. Vrijednost korištenja pomoćnih materijala za istraživanje koncepta, na primjer, zavisi ne samo od toga *da li* se pomoćni materijali koriste, nego također i od toga *kako* se oni koriste sa učenicima. Slično, nastava sa učenicima podijeljenim u male grupe će imati koristi za učenike jedino ako nastavnik zna kada i kako koristiti tu nastavnu praksu. Zbog toga, kada nastavnik implementira neku od preporuka, važno je da on konstantno nadgleda i podešava način kako se praksa implementira da bi se imao maksimum poboljšanja kvaliteta.

Bez obzira na ova upozorenja, nalazi istraživanja ukazuju da određene nastavne strategije i metode treba pažljivo razmotriti kada nastavnici nastoje poboljšati svoje nastavne prakse iz matematike. Kada čitaoci razmotre sugestije koje slijede, postati će jasno da su mnoge prakse u uzajamnoj vezi. Postoji također značajna raznovrsnost praksa za koje je nađeno da su efikasne, tako da većina nastavnika ima mogućnost da identificira ideje koje žele da probaju u svojim razredima. Prakse nisu uzajamno isključive. Zapravo, one teže da budu komplementarne. Logična konzistentnost i raznovrsnost sugestija iz istraživanja čine ih i interesantnim i praktičnim.

Autori se žele zahvaliti slijedećim kolegama koji su dali korisne sugestije: Tom Cooney-u, profesoru matematike na Georgia Univerzitetu, James Hiebert-u, profesoru matematičkog obrazovanja na Delaware Univerzitetu, Judy Sowder, profesoru matematike na San Diego državnom Univerzitetu, i Terry Wood-u, profesoru matematičkog obrazovanja na Purdue Univerzitetu.

# 1. Prilika za učenje

**Opseg učenikovih mogućnosti da uči matematičke sadržaje se direktno i decidno odnosi na njegova matematička postignuća.**

## Nalazi istraživanja

Termin "prilika za učenje" odnosi se na to šta je proučavano i utjelovljeno u zadacima koje učenici izvršavaju. U matematici, prilika za učenje uključuje prezentirani djelokrug iz matematike, a koji se odnosi na to kako se odvijala nastava matematike i u kakvom su odnosu učenikove ulazne sposobnosti i novi materijal.

U mnogim istraživačkim studijama je dokumentirana jaka veza između prilika za učenje i učenikove performanse iz matematike. Koncept je prostudiran u Prvoj međunarodnoj matematičkoj studiji (Husén), gdje su nastavnici pitani da procijene obim učenikove izloženosti posebnim matematičkim konceptima i sposobnostima. Nađena je jaka korelacija između nivoa prilike za učenje i nivoa značenja učenikovog postignuća u matematici. Visoki nivoi prilika za učenje su povezani sa visokim postignućima. Veza između postignuća učenika u matematici i prilike za učenje je također utvrđena u kasnijim međunarodnim studijama, kao što su Druga međunarodna matematička studija (McKnight et al.) i Treća međunarodna studija o matematici i nauci (TIMSS) (Schmidt, McKnight & Raizen).

Kao što se moglo i očekivati, postoji pozitivan odnos između vremena posvećenog matematici i općeg uspjeha iz matematike. Suarez et al., u pregledu istraživanja o vremenu posvećenog nastavi, su našli jak dokaz veze između vremena utrošenog na podučavanje i učenikovih vještina. Na međunarodnom planu, Keeves je za područje država u Australiji našao značajnu vezu između postignuća u matematici i ukupnog vremena u nastavnim planovima i programima koje je predviđeno za matematiku.

Usprkos ovim nalazima istraživanja, mnogi učenici još uvijek imaju samo minimalnu količinu vremena predviđenu za nastavu matematike. Na primjer, Grouws i Smith u analizi podataka iz 1996. godine koji su dobijeni Nacionalnom procjenom napretka u obrazovanju (National Assessment of Educational Progress – NAEP), a koja se odnosila na nastavu matematike, su našli da je 20% učenika osmog razreda imalo trideset minuta ili manje nastave matematike dnevno.

Istraživanje je također pokazalo jaku vezu između časova matematike koji se drže u srednjoj školi i postignuća učenika. Izvještaji sa Nacionalne procjene progresa u obrazovanju su pokazali da je "broj dodatnih časova iz matematike bio najjači preduslov za učenikove" postignute vještine iz matematike, pod uslovom da se vodilo računa o raznolikosti porodičnih uslova učenika.

Udžbenici su također dovođeni u vezu sa prilikama za učenje učenika, pošto mnogi udžbenici ne sadrže mnogo sadržaja koji su novi za učenika. Nedostatak pažnje u odnosu na novu materiju i veliki naglasak na ponavljanju u mnogim udžbenicima su posebno zabrinjavajući u osnovnoj školi i nižim razredima srednje škole. Flanders je istraživao nekoliko serija udžbenika i našao da manje od 50% stranica u udžbenicima za razrede od drugog do osmog sadrži bilo koju materiju koja je nova za učenike. U pregledu dvanaest serija udžbenika matematike za učenike nižih razreda srednje škole, Kulm, Morris i Grier su našli da u mnogim serijama tradicionalnih udžbenika nedostaje mnogo sadržaja preporučenih u zadnjim dokumentima vezanim za standarde.

Podaci za Sjedinjene Američke Države iz Treće međunarodne studije o matematici i nauci (TIMSS) su pokazali značajne razlike u sadržaju koji se predaje u raznim vidovima nastave matematike. Na primjer, učenici na popravnim časovima, tipičnim časovima za osmi razred i časovima nastave prije algebre su dobijali vrlo različite matematičke sadržaje, i u skladu sa time su varirali nivoi njihovog postignuća. Testovi postignuća upotrijebljeni u međunarodnim studijama i u nacionalnoj procjeni progresa u obrazovanju služe za mjerenje važnih matematičkih postignuća i zajednički su obezbijedili širok i reprezentativan obuhvat matematike. Osim toga, testovi su općenito služili i da se izmjeri šta najbolji učenici znaju a šta ne znaju. Konzekventno tome, oni daju pouzdane mjere postignuća radi određivanja važnosti prilika za učenje kao faktora učenikovog postignuća iz matematike.

## **U razredu**

Nalazi o vezi između prilika za učenje i postignuća učenika imaju za nastavnike važne implikacije. Posebno se čini razumnim da se u svim razredima predvidi dovoljno vremena za nastavu matematike. Kratke periode nastave matematike, uvedene iz praktičnih ili filozofskih razloga, treba ozbiljno dovesti u pitanje. Posebno su zabrinjavajući časovi matematike od 30-35 minuta koji su bili uvedeni u nekim srednjim školama.

Udžbenike koji glavnu pažnju posvećuju ponavljanju i koji upućuju na malo novih sadržaja za svaku godinu treba izbjegavati, ili njihova upotreba treba biti na odgovarajući način dopunjena. Nastavnici trebaju koristiti udžbenike samo kao jedno od nastavnih pomagala među mnogim drugim, radije nego da se ispunjava obaveza koristeći udžbenik na bazi jedna lekcija dnevno.

Nastavnici moraju osigurati da učenici imaju priliku da nauče važne sadržaje i da steknu važne vještine. Ako se učenici spremaju da se na efikasan način natječu u globalnom, tehnološki orijentiranom društvu, oni se moraju podučavati matematičkim vještinama koje su im za to potrebne. Tako, ako je rješavanje problema suština, tome se mora redovno i ustrajno posvećivati pažnja. Ako očekujemo da učenici nauče značenje brojeva, važno je da se posveti pažnja usmenom računanju i procjenjivanju kao dijelu kurikuluma. Ako su važna rezoniranja o proporcijama ili deduktivno zaključivanje, tome treba posvetiti pažnju pri realizaciji kurikuluma u razredu.

Važno je napomenuti da su prilike za učenje povezane sa pitanjima pravičnosti. Neke obrazovne prakse daju pojedinim grupama učenika različite prilike za učenje. Na primjer, nedavna studija Američke asocijacije žena sa univerziteta je pokazala značajnu razliku korištenja tehnologije od strane mladića i djevojaka. Djevojke na časove kompjuterskih nauka i kompjuterskog dizajna idu manje nego dječaci. Osim toga, momci često koriste kompjutere za programe i za rješavanje problema, dok djevojke teže da koriste kompjutere primarno kao obrađivače teksta. To ukazuje da, kada se tehnologija koristi na časovima matematike, nastavnici moraju učenicima davati zadatke i odgovornost na takav način da mladići i djevojke stiču aktivno iskustvo korištenja tehnoloških pomagala.

Prilika za učenje također dolazi do izražaja kada se sa učenicima koji postižu niže rezultate obrađuje kurikulum koji ih podučava "bazičnim sposobnostima", orijentiran na razvoj proceduralnih sposobnosti, sa malo mogućnosti da se razviju sposobnosti rješavanja problema i razmišljanja višeg nivoa. Kada se takvim učenicima često daje osiromašen kurikulum to je poseban problem pošto se često propusti da ih se poduči idejama i konceptima koji su im potrebni u svakodnevnom životu i za radno mjesto.

**Literatura:** American Association of University Women, 1998.; Atanda, 1999.; Flanders, 1987.; Grouws & Smith, u štampi; Hawkins, Stancavage & Dossey, 1998.; Husén, 1967.; Keeves, 1976., 1994.; Kulm, Moris & Grier, 1999.; McKnight et al., 1987.; Mullis, Jenkins & Johnson, 1994.; National Center for Education Statistics, 1996., 1997., 1998.; Schmidt, McKnight & Raizen, 1997.; Secada, 1992.; Suarez et al., 1991.

## 2. Fokusiranje na značenje

**Fokusiranje nastave na razumijevanje značenja važnih matematičkih pojmova podiže nivo učenja učenika.**

### Nalazi istraživanja

Duga je historija istraživanja, vraćajući se nazad u 1940-te godine i rad Williama Brownella, o efektima podučavanja o značenju i razumijevanju u matematici. Istraživanja postoje i pokazuju da naglasak na podučavanje o značenju ima pozitivne efekte na učenikovo učenje, uključujući bolje početno učenje, bolje pamćenje i povećanu vjerovatnoću da će se ideje koristiti u novim situacijama. Do ovih rezultata se također došlo i u studijama provedenim u veoma siromašnim područjima.

### U razredu

Kao što se moglo očekivati, koncept "podučavanja o značenju" je pomalo varirao od studije do studije, i evoluirao je tokom vremena. Nastavnici bi htjeli da razmotre kako bi se mogle različite interpretacije ovog koncepta inkorporirati u njihovu praksu u razredu.

- *Naglasiti matematičko značenje ideja, uključujući i kako su ideja, koncept ili sposobnost na višestruke načine povezani sa drugim matematičkim idejama na logično postojan i osjetljiv način.* Tako, za oduzimanje naglasiti inverzni, ili "nečinjenje", odnos između njega i sabiranja. Općenito, naglasak na značenju je bio uobičajen u ranijim istraživanjima u ovom području u kasnim 1930-im godinama, i njegov smisao je bio da se izbjegne matematičko značenje ideja kojima se pridavala samo minorna pažnja u odnosu na veliki naglasak na društvenu upotrebu i korisnost matematike u svakodnevnom životu.
- *Kreirati kontekst učenja u razredu u kojem učenici mogu konstruirati značenje.* Učenici mogu značajno učiti matematiku i u kontekstima koji su u uskoj vezi sa situacijama stvarnog života i kontekstima koji su čisto matematički. Apstraktnost okruženja za učenje i kako se učenici odnose prema njemu moraju biti pažljivo regulirani, blisko nadgledani i pažljivo odabrani. Mora se posvetiti pažnja interesima učenika i njihovom prethodnom znanju. Podučavanje i učenje matematike za učenike mora biti prihvatljivo i za njih mora imati smisla. Važan faktor podučavanja značenja je povezivanje novih ideja i sposobnosti sa učenikovim dosadašnjim znanjem i iskustvom.

- *Veze između matematike i drugih nastavnih predmeta učiniti eksplicitnim.* Na primjer, podučavanje bi moglo povezati sposobnosti prikupljanja i prezentacije podataka pri pribavljanju javnog mnjenja u društvenim studijama. Ili, ono može povezivati matematički koncept direktne varijacije sa konceptom sile u fizici da bi se pomoglo da se za neki pojam nađe uzorak u stvarnom životu.
- *Voditi računa o učenikovim značenjima i učenikovim shvatanjima u procesu podučavanja.* Učeničke koncepcije iste ideje će varirati, kao što će varirati njihove metode rješavanja problema i provođenja procedura. U dizajniranju i implementaciji nastave nastavnici trebaju kod učenika poticati izgradnju inicijativa vezanih za pojmove i metode.

**Literatura:** Aubrey, 1997.; Brownell, 1945., 1947.; Carpenter et al., 1998.; Cobb et al., 1991.; Fuson, 1992.; Good, Grouws & Ebmeier, 1983.; Hiebert & Carpenter, 1992.; Hiebert & Wearne, 1996.; Hiebert et al., 1997.; Kamii, 1985., 1989., 1994.; Knapp, Shields & Turnbull, 1995.; Koehler & Grouws, 1992.; Skemp, 1978.; Van Engen, 1949.; Wood & Sellers, 1996., 1997.

### **3. Učenje novih koncepata i sposobnosti tokom rješavanja problema**

**Učenici rješavanjem problema mogu i učiti koncepte i sticati sposobnosti.**

#### **Nalazi istraživanja**

Istraživanja pokazuju da učenici koji ranije razviju konceptualno razumijevanje kasnije imaju boljeg uspjeha u sticanju proceduralnih znanja. Učenici sa dobrim konceptualnim razumijevanjem su sposobni da uspješno rješavaju slične zadatke i da razviju procedure i sposobnosti koje prije nisu učili. Učenici bez konceptualnog razumijevanja su sposobni da steknu proceduralna znanja kada se poduče odgovarajućim sposobnostima, ali istraživanje pokazuje da učenicima sa niskim nivoima konceptualnog razumijevanja treba više prakse da bi stekli proceduralno znanje.

Istraživanje koje je provela Heid pokazuje da su učenici sposobni da razumiju koncepte bez prethodnog ili paralelnog razvoja sposobnosti. U njenom istraživanju koje se odnosilo na učenike koji su učili računanje, nastava je bila skoro upotpunosti fokusirana na konceptualno razumijevanje. Sposobnostima je podučavano kratko na kraju nastave. Sa proceduralnim sposobnostima, učenici u pristupu konceptualnog razumijevanja su imali uspjeha isto kao i oni koji su

podučavani sa tradicionalnim pristupom. Osim toga, ovi učenici su značajno premašili u konceptualnom razumijevanju učenike podučavane na tradicionalan način.

Mack je pokazala da se učeničko znanje naučeno napamet (i često manjkavo) znanje često miješa sa njihovim neformalnim (i obično tačnim) znanjem o razlomcima. Ona je uspješno koristila učeničko neformalno znanje da im pomogne da shvate simbole za razlomke i da razviju algoritme za operacije. Fawcett-ovo istraživanje o učenicima geometrije pokazuje da učenici mogu učiti geometrijske strukture i podučavati se bazičnim konceptima i sposobnostima kroz rješavanje problema.

## **U razredu**

Dokazano je da učenici mogu učiti nove sposobnosti i koncepte dok rade na rješavanju problema. Na primjer, učenici naoružani samo znanjem o osnovnom sabiranju mogu proširiti svoje učenje razvojem neformalnih algoritama za sabiranje većih brojeva. Slično, rješavanjem pažljivo odabranih nerutinskih problema, učenici mogu postići razumijevanje mnogo važnijih matematičkih pojmova, kao što su prosti brojevi i obim/površina relacije.

Razvoju sofisticiranijih matematičkih sposobnosti također se može pristupiti tretiranjem njihovog razvoja kao problema koje učenici trebaju riješiti. Nastavnici mogu koristiti učenička neformalna i intuitivna znanja u drugim područjima da bi se naučile druge korisne procedure. Podučavanje može počinjati sa primjerom za koji učenici intuitivno znaju odgovor. Na ovaj način se učenicima omogućuje da razviju svoj vlastiti algoritam. Na primjer, većina učenika razumije da ako imamo četiri pice i ako se pojedje polovina jedne pice da će ostati tri i po pice. Nastavnici mogu iskoristiti ovo znanje da se učenicima pomogne da postignu razumijevanje oduzimanja razlomaka.

Istraživanje pokazuje da nastavnicima nije neophodno da se prvo fokusiraju na razvoj sposobnosti a zatim da idu na rješavanje problema. Obadvoje se može učiniti zajedno. Sposobnosti se mogu razvijati na bazi neophodnog ili se njihov razvoj može pomoći korištenjem tehnologije. Zapravo, postoje dokazi da ako su učenici previše uvježbavani na izoliranim sposobnostima, da im treba više vremena da tim sposobnostima kasnije daju smisla.

**Literatura:** Cognition and Technology Group, 1997.; Fawcett, 1938.; Heid, 1988.; Hiebert & Wearne, 1996.; Mack, 1990.; Resnick & Omanson, 1987.; Wearne & Hiebert, 1988.

## **4. Povoljne prilike za oboje: za otkrivanje i za praksu**

**Davanje učenicima povoljne prilike da otkrivaju i da iznalaze nova znanja i prilike da primjenjuju u praksi ono šta su naučili usavršava učenička postignuća.**

### **Nalazi istraživanja**

Podaci iz TIMSS video studije pokazuju da se u Sjedinjenim Državama u osmim razredima preko 90% vremena nastave matematike provodi u prakticiranju rutinskih procedura, a preostalo vrijeme se općenito provodi u primjeni procedura u novim situacijama. U stvarnosti nije utrošeno vrijeme na otkrivanje novih procedura i analiziranje neobičnih situacija. U usporedbi sa ovim, učenici istog nivoa obrazovanja u tipičnom japanskom razredu provode približno 40% nastavnog vremena prakticirajući rutinske procedure, 15% primjenjujući procedure u novim situacijama, a 45% vremena provode na otkrivanju novih procedura i analiziranju novih situacija.

Podaci iz istraživanja pokazuju da učenici imaju potrebu da im se stvore povoljne okolnosti i za prakticiranje i za otkrivanje. Nalazi brojnih istraživačkih studija pokazuju da kada učenici otkrivaju matematičke pojmove i pronalaze matematičke procedure da oni imaju jače konceptualno razumijevanje veza između matematičkih pojmova.

Mnogi uspješni reformski orijentisani programi za učenike predviđaju vrijeme da prakticiraju ono šta su naučili i ono šta su otkrili. Učenicima trebaju povoljne prilike da prakticiraju ono šta uče i da probaju obavljati onu vrstu zadataka za koje očekuju da će pokazati sposobnosti. Na primjer, ako nastavnici žele da učenici budu vješti u rješavanju problema, učenicima se trebaju pružiti prilike da prakticiraju rješavanje problema. Ako je cilj jako deduktivno rezoniranje, učenikov rad mora uključiti zadatke koji zahtijevaju takvo rezoniranje. I, naravno, ako se u procedurama ima za cilj kompetentnost, kurikulum mora uključiti poklanjanje pažnje takvim procedurama.

### **U razredu**

Jasno, potreban je balans između vremena koje učenici provedu prakticirajući rutinske procedure i vremena koje oni posvećuju pronalaženju i otkrivanju novih pojmova. Nastavnici ne trebaju birati između tih aktivnosti. Zapravo, oni ne trebaju praviti izbor, ako učenici osnažuju svoje znanje iz matematike koje im je potrebno. Nastavnici se moraju truditi da osiguraju da

obje aktivnosti budu uključene u odgovarajućim proporcijama i na odgovarajući način. Gore citirana istraživanja pokazuju da za sada nije izbalansirana pažnja u odnosu na dva iznesena aspekta i da je veoma često previše naglaska stavljeno na izgrađivanje sposobnosti, sa malo prilika za učenike da se angažiraju na davanje smisla i na aktivnosti usmjerene na otkrića.

Da bi se poboljšale prilike za inventivan rad, nastavnici trebaju često koristiti nerutinske probleme, periodično uključiti lekcije koje uvode nove sposobnosti kroz postavljanje problema koje treba rješavati, i da učenicima redovno omoguće da izgrađuju nova znanja bazirana na njihovom intuitivnom znanju i neformalnim procedurama.

**Literatura:** Boaler, 1998.; Brownell, 1945., 1947.; Carpenter et al., 1998.; Cobb et al., 1991.; Cognition and Technology Group, 1997.; Resnick, 1980.; Stigler & Hiebert, 1997.; Wood & Sellers, 1996., 1997.

## **5. Otvorenost prema učeničkim metodama rješavanja i učeničkoj interakciji**

**Podučavanje koje inkorporira učeničke metode intuitivnog rješavanja može poboljšati učenikovo učenje, posebno kada je kombinirano sa prilikama za učenikove interakcije i diskusije.**

### **Nalazi istraživanja**

Nedavni rezultati TIMSS video studije su pokazali da se u Japanskim učionicama tokom nastave u velikoj mjeri koriste metode u kojima učenici rješavaju zadatke. Zanimljivo, iste nastavne tehnike se pojavljuju u mnogim uspješnim američkim istraživačkim projektima. Nalazi iz američkih studija jasno pokazuju dva važna principa koji su povezani sa razvojem učeničkog dubokog konceptualnog razumijevanja matematike. Prvo, učenikovo postignuće i razumijevanje su značajno poboljšani kada su nastavnici svjesni kako učenici konstruiraju znanje, kada su upućeni u metode intuitivnog rješavanja koje učenici koriste kada rješavaju probleme, i koriste to znanje kada planiraju i realiziraju nastavu matematike. Ovi rezultati su jasno pokazani u osnovnoj školi i počinju da se pokazuju u srednjoj školi.

Drugo, strukturiranje nastave oko pažljivo odabranih problema, omogućavanje učenicima da sarađuju prilikom rješavanja tih problema, te pružanjem prilika učenicima da razmjenjuju svoje metode rješavanja problema rezultira u poboljšanju dostignutog stepena rješavanja problema. Značajno je da

ovi dobici dolaze bez gubitka u postizanju sposobnosti i koncepata mjerenih standardiziranim testovima postignuća.

Istraživanje je također potvrdilo da kada učenici imaju priliku da razviju svoje vlastite metode rješavanja problema da su oni u boljoj mogućnosti da primijene matematičko znanje za rješavanje novih problema.

## **U razredu**

Rezultati istraživanja pokazuju da se nastavnici trebaju koncentrirati na pružanje prilika za učenike da sarađuju u situacijama koje obiluju problemima. Osim pružanja adekvatnih situacija koje obiluju problemima, nastavnici moraju ohrabriti učenike da pronađu svoje vlastite metode rješavanja i pružiti im prilike da razmjenjuju i upoređuju svoje metode rješavanja i odgovore. Jedan od načina organizacije takve nastave je da se organizira rad učenika u malim grupama na početku, a zatim da se ideje i rješenja razmjenjuju u diskusijama u čitavom razredu.

Jedna korisna nastavna tehnika za nastavnike je da učenicima daju interesantan problem da rješavaju, da ih puste da rade i da prate koji učenici koriste koje strategije (dati ocjene ako je potrebno). U uslovima čitavog razreda, nastavnik može tražiti od učenika da diskutiraju svoje metode rješavanja po unaprijed određenom i pažljivo razmotrenom redu, rangirajući često te metode od najosnovnijih prema formalnijim i sofisticiranijim. Ovakva struktura nastave se uspješno koristi na nastavi matematike u mnogim japanskim školama.

**Literatura:** Boaler, 1998.; Carpenter et al., 1988., 1989., 1998.; Cobb, Yackel & Wood, 1992.; Cobb et al., 1991.; Cognition and Technology Group, 1997.; Fennema, Carpenter & Peterson, 1989.; Fennema et al., 1993., 1996.; Hiebert & Wearne, 1993., 1996.; Kamii, 1985., 1989., 1994.; Stigler & Hiebert, 1997.; Stigler et al., 1999.; Wood, Cobb & Yackel, 1995.; Wood et al., 1993.; Yackel, Cobb & Wood, 1991.

## 6. Učenje u malim grupama

**Korištenje malih grupa učenika za rad na aktivnostima i rješavanju problema može poboljšati učenička postignuća iz matematike.**

### Nalazi istraživanja

Dokazi iz velikog broja istraživanja o nastavi matematike pokazuju da korištenje različitih tipova malih grupa za rad na raznim školskim zadacima ima pozitivne učinke na učenje učenika. Davidson je, na primjer, pregledao oko osamdeset studija iz matematike u kojima se porede postignuća učenika u malim grupama sa onima iz tradicionalne nastave sa čitavim razredom. U više od 40% ovih studija učenici gdje su korišteni pristupi sa malim grupama su zabilježili značajno bolje rezultate na kontrolnim mjerenjima učeničkih performansi. U samo dvije od sedamdeset-devet studija učenici kontrolne grupe iz razreda sa nastavom za čitav razred su postigli bolje rezultate od onih sa radom u malim grupama, ali u ovim studijama su postojale neke neregularnosti u dizajnu.

Pregledom devedeset i devet studija o metodama kooperativnog učenja po grupama na nivou osnovne i srednje škole, Slavin je zaključio da su kooperativne metode bile efikasne u poboljšanju uspjeha učenika. U najefikasnijim metodama isticani su i grupni ciljevi i individualna odgovornost.

Webb je pregledom studija koje su istraživale interakciju među vršnjacima i postignuća u malim grupama (sedamnaest studija, razredi 2-11.) uočio pojavu nekoliko konzistentnih nalaza. Prvo, davanje objašnjenja pojma, metode ili rješenja članovima tima pri radu u grupi je imalo pozitivan odnos prema uspjehu. Drugo, ako se radilo o "neodgovarajućem" predznanju (nema predznanja ili predznanje koje nije primjereno onom šta se govori ili šta se radi) kod članova tima, to je imalo negativan uticaj na postignuće. Webb-ov pregled je također pokazao da je grupni rad bio najefikasniji kada su učenici podučavani kako raditi u grupama i kako dati i primiti pomoć. Dobijena pomoć je bila najefikasnija kada je ona bila u obliku elaboriranih objašnjenja (ne samo odgovor) i kada se primjenjuje od strane učenika ili u tekućem ili u novom problemu.

Kvalitativna istraživanja su pokazala da rad u malim grupama može rezultirati drugim važnim rezultatima koji su izvan potvrđenih općih postignuća. U jednom takvom istraživanju, Yackel, Cobb i Wood su proučavali drugi razred u kojem je rješavanje problema kroz rad u malim grupama, praćen diskusijama u

čitavom razredu, bila primarna nastavna strategija tokom čitave školske godine. Oni su našli da je ovakav pristup stvarao mnogo prilika za učenje koje se obično ne pojavljuju u tradicionalnim razredima, uključujući prilike za saradnju kroz dijalog i rješavanje sučeljenih stajališta.

Slavin je istraživanjem pokazao pozitivne efekte rada u malim grupama na međuetničke odnose i stavove učenika u odnosu na školu.

## **U razredu**

Nalazi istraživanja jasno podržavaju rad u malim grupama kao sastavni dio nastave matematike. Ovaj pristup može rezultirati poboljšanjem učenja učenika prema tradicionalnim mjerilima, kao i drugim važnim postignućima.

Kada se koristi rad u malim grupama na nastavi matematike, nastavnici trebaju:

- Birati zadatke koji se odnose na važne matematičke koncepte i pojmove;
- Odabrati zadatke koji su podesni za grupni rad;
- Predvidjeti da na početku učenici rade individualno na zadatku, a kasnije da ga nastave raditi u grupi gdje učenici međusobno saraduju i vrše razmjenu ideja, ali izgrađuju i samostalan rad i samostalnu obradu pojmova;
- Dati jasne instrukcije grupama i izraziti jasna očekivanja od svake od njih,
- Naglasiti i grupne ciljeve i individualnu odgovornost;
- Odabrati zadatke koje učenici smatraju interesantnim;
- Osigurati završetak rada grupe, kada se ključne ideje i metode iznesu na površinu ili od strane nastavnika ili od učenika ili od obadvoje.

Konačno, kao što je nekoliko istraživačkih studija pokazalo, nastavnici ne trebaju smatrati male grupe kao nešto što se uvijek mora koristiti ili što se nikad ne koristi. Zapravo, nastavu u malim grupama treba shvatiti kao jednu od nastavnih praksa koja je odgovarajuća za određene nastavne ciljeve, ali se nastava može realizirati i kroz druge organizacione aranžmane, uključujući i nastavu za čitav razred.

**Literatura:** Cohen, 1994.; Davidson, 1985.; Laborde, 1994.; Slavin, 1990., 1995.; Webb, 1991.; Webb, Troper & Fall, 1995.; Yackel, Cobb & Wood, 1991.

## 7. Diskusija u čitavom razredu

**Diskusija u čitavom razredu nakon individualnog i grupnog rada poboljšava uspjeh učenika.**

### Nalazi istraživanja

Istraživanja pokazuju da diskusija u čitavom razredu može biti efikasna kada se koristi za razmjenu i objašnjenje raznolikosti rješenja kojima su učenici riješili probleme. To učenicima omogućava da vide mnoge načine razmatranja situacije i raznolikost odgovarajućih i prihvatljivih rješenja.

Wood je našao da diskusija u čitavom razredu najbolje funkcionira kada je jasno shvaćena diskusija o očekivanjima. Od učenika treba očekivati da jedni drugima na fer način evaluiraju ideje i rezoniranja. To pomaže da se stvara radna atmosfera u kojoj se učenici ugodno osjećaju pri razmjeni ideja i uzajamnoj diskusiji metoda i rezoniranja. Osim toga, od učenika treba očekivati da budu aktivni slušaoci koji učestvuju u diskusijama i imaju osjećaj odgovornosti i razumijevanja jedni prema drugima.

Spoznajno istraživanje pokazuje da su konceptualna promjena i napredak mišljenja rezultat mentalnog procesa involviranog u rješavanje konflikata i kontradikcija. Dakle, nejasnoća i konflikt tokom diskusije u čitavom razredu imaju značajan potencijal za poboljšanje učenikovog učenja kada nastavnik pažljivo uredi situaciju. Kada učenici postave izazove za svoje metode, oni radeći zajedno na prevazilaženju razlika u mišljenju ili nejasnoća u rezoniranju osnažuju svoje razumijevanje konceptata i procedura. U tom smislu, diskusija postaje kolaborativni napor za rješavanje problema. Svaki pojedinac tako doprinosi ukupnom rezultatu rješavanja problema date situacije. Ta diskusija pomaže proizvođenju pojma zajednički stečenog znanja (javno znanje).

### U razredu

Važno je da iza učenikovog rada na aktivnostima rješavanja problema ide diskusija u čitavom razredu. Diskusija treba biti sažetak individualnog rada pomoću kojeg ključne ideje izlaze na površinu. Ovo može biti obavljeno kroz učeničku prezentaciju ili diskusiju njihovih individualnih metoda rješavanja, ili pomoću drugih metoda dovođenja do završetka debate koje sprovode nastavnik, učenici ili zajedno.

Diskusija u čitavom razredu može također biti efikasan dijagnostički instrument za određivanje dubine razumijevanja i identificiranja

neshvatanja. Nastavnici mogu identificirati područja teškoća pojedinih učenika, kao i ustanoviti područja učenikovog uspjeha ili napredovanja.

Diskusija u čitavom razredu može biti efikasna i korisna nastavna praksa. Neke od prilika podučavanja koje se nude u diskusijama u čitavom razredu se ne pojavljuju u malim grupama niti u pojedinačnom radu. Dakle, diskusija u čitavom razredu ima važno mjesto u razredu zajedno sa drugim nastavnim praksama.

**Literatura:** Ball, 1993.; Cobb et al., 1992.; Wood, 1999.

## 8. Značenje broja

**Nastava matematike sa fokusom na značenju broja potiče učenike da postanu rješavatelji problema u raznolikim situacijama i da gledaju na matematiku kao na disciplinu u kojoj je razmišljanje važno.**

### Nalazi istraživanja

"Značenje broja" se odnosi na posjedovanje intuitivnog osjećaja za veličinu broja i za kombinacije, kao i sposobnosti da se fleksibilno radi sa brojevima u problemskim situacijama radi pravljenja dobrih odluka i prihvatljivih prosuđivanja. To uključuje sposobnost fleksibilnog procesa usmenog računanja, procjenjivanja, osjećaj veličine broja, kretanje između prezentacije sistema brojeva i zaključivanja o opravdanosti numeričkih rezultata.

Markovits i Sowder su proučavali sedme razrede u kojima su držane posebne lekcije o veličini brojeva, usmenom računanju i računskim procjenama. Na osnovu pojedinačnih intervjua, oni su našli da su učenici poslije tih posebnih predavanja bili sigurniji u korištenju strategija koje odražavaju temeljito značenje brojeva, i da je to bila dugotrajna promjena.

Drugo važno istraživanje u ovom području involvira značenje brojeva uz podučavanje iz drugih matematičkih tema, što je drugačije od podučavanja iz odvojenih lekcija o aspektiva značenja brojeva. U studiji provedenoj sa učenicima drugog razreda, Cobb i njegove kolege su našli da je značenje brojeva kod učenika osnaženo kao rezultat kurikuluma usmjerenog na rješavanje problema gdje su naglašeni učenikova interakcija i samogenerirani metodi rješavanja. Skoro svi učenici su razvili raznolike strategije za rješavanje problema širokog ranga. Učenici su također pokazali i druga postignuća u razvoju ličnosti, kao što je povećana ustrajnost u rješavanju problema.

Kamii je radio sa nastavnicima osnovne škole koji su nastojali da implementiraju pristup nastavi utemeljen u konstruktivističkoj teoriji učenja koja je bazirana na radu Piažea (Piaget). Centralno u nastavnom pristupu je bilo da se kod učenika razviju vlastita razmišljanja, metode i značenje brojeva. Podaci dobijeni iz intervju sa učenicima su pokazali da je tretirana grupa pokazala veću autonomiju, konceptualno razumijevanje o ulozi vrijednosti i sposobnost pravljenja procjena kao i usmeno računanje nego što su to činili učenici iz razreda sa kojima je vršeno poređenje.

## **U razredu**

Posvećivanje pažnje značenju brojeva tokom podučavanja raznim matematičkim temama doprinosi jačanju učenikove sposobnosti u datom području. Sposobnost u mnogim aspektima značenja brojeva je za učenike važno postignuće iz matematike. Preko 90% računanja koje se vrši izvan razreda se vrši bez olovke i papira, koristeći usmeno računanje, procjenu ili koristeći kalkulator. Međutim, u mnogim razredima se naporima usađivanja smisla za brojeve poklanja nedovoljna pažnja.

Kada nastavnici razvijaju strategije za podučavanje o značenju brojeva, oni trebaju detaljno razmotriti kretanje izvan pristupa sticanja sposobnosti na osnovu pojedinih lekcija (na primjer, fokusiranje na jednostavnim izolovanim sposobnostima) prema pristupu koji je više integriran i koji u aktivnostima u razredu potiče razvoj znanja o značenju brojeva, od razvoja procedura računanja prema rješavanju matematičkih problema. Iako je potrebno više istraživanja, integrirani pristup značenju brojeva bi vjerovatno rezultirao ne samo većem znanju o značenju brojeva nego također i drugim jednako važnim postignućima.

**Literatura:** Cobb et al., 1991.; Greeno, 1991.; Kamii, 1985., 1989., 1994.; Markovits & Sowder, 1994.; Reys & Barger, 1994.; Reys et al., 1991.; Sowder, 1992a, 1992b.

## 9. Konkretni materijali

**Dugotrajno korištenje konkretnih materijala pozitivno utiče na postignuće učenika iz matematike i poboljšava stavove u odnosu na matematiku.**

### Nalazi istraživanja

Mnoge studije pokazuju da korištenje konkretnih materijala može proizvesti značajnu upotrebu sistema matematičkih znakova i povećati učenikov razvoj koncepata. U širokom pregledu aktivnosti učenja matematike od predškola do osmog razreda, Suydam i Higgins su zaključili da upotreba manipulativnih materijala proizvodi veća postignuća nego kada se oni ne koriste. Na osnovu novijih analiza šezdeset studija (od vrtića do više srednje škole) u kojima je vršeno poređenje efekata korištenja konkretnih materijala sa efektima apstraktnije nastave, Sowell je zaključio da dugotrajno korištenje konkretnih nastavnih materijala od strane nastavnika koji su obučeni za njihovo korištenje poboljšava postignuća i stavove kod učenika.

Usprkos generalno pozitivnim rezultatima, postoje neke nedosljednosti u nalazima istraživanja. Kao što Thompson naglašava, rezultati istraživanja koji se odnose na konkretne materijale variraju, čak i među tretmanima koji su strogo kontrolirani i nadgledani i koji uključuju iste konkretne materijale. Na primjer, u studijama koje su proveli Resnick i Omanson te studijama od Labinowicza, korištenje materijala u desetom razredu je pokazalo mali uticaj na učenje djece. Suprotno ovome, Fuson i Briars te Hiebert i Wearne su iznijeli pozitivne rezultate korištenja materijala u desetom razredu.

Razlike u rezultatima među ovim studijama bi mogle biti zbog prirode angažmana učenika u odnosu na konkretne materijale i njihove orijentacije prema materijalima koji se odnose na matematičke oznake i numeričke vrijednosti. One bi također mogle biti uzrokovane različitim orijentacijama u studijama u odnosu na ulogu algoritama za računanje i kako bi oni mogli biti razvijeni u razredu. Generalno, ipak, nejasnoće u nekim nalazima istraživanja ne podrivaju generalni konsenzus da su konkretni materijali vrijedan instrument obrazovanja.

### U razredu

Premda uspješna nastava od nastavnika traži da pažljivo odabiru svoje procedure na bazi konteksta u kojem će one biti upotrijebljene, raspoloživa istraživanja pokazuju da nastavnici trebaju redovnije koristiti manipulativne materijale u nastavi matematike da bi učenicima pružili priručno sredstvo koje će im pomoći da konstruišu korisna značenja za matematičke pojmove koje uče.

Korištenje konkretnih materijala ne treba biti ograničeno na demonstracije. Od suštinske je važnosti da djeca koriste materijale na osmišljene načine radije nego na rigidan i propisan način u kojem se stavlja fokus na zapamćivanje umjesto na razmišljanje. Dakle, kao što Thompson kaže, "prije nego što bi učenici mogli činiti korisnu upotrebu konkretnih materijala, oni prvo moraju biti upućeni u izražavanje svoga shvatanja na značajne načine. Dalje, važno je da učenici sagledaju dvosmjernan odnos između konkretnih utjelovljenja matematičkih koncepata i sistema matematičkih oznaka upotrijebljenih za njihovu prezentaciju."

**Literatura:** Fuson & Briars, 1990.; Hiebert & Wearne, 1992.; Labinowitz, 1985.; Leinenbach & Raymond, 1996.; resnick & Omanson, 1987.; Sowell, 1989.; Suydam & Higgins, 1977.; Thompson, 1992.; Varelas & Becker, 1997.

## 10. Učeničko korištenje kalkulatora

**Korištenje kalkulatora u učenju matematike može rezultirati povećanjem uspjeha i poboljšanjem stavova učenika.**

### Nalazi istraživanja

Uticao korištenja kalkulatora na učenikovo učenje je bilo popularno područje istraživanja u matematičkom obrazovanju. Mnoge provedene studije su sa dosta postojanosti pokazale da osmišljeno korištenje kalkulatora na nastavi matematike osnažuje učenikova postignuća iz matematike i stavove u odnosu prema matematici.

Na osnovu analize sedamdeset i devet studija o kalkulatorima bez grafičkog prikaza, Hembree i Dessart su zaključili da upotreba ručnih kalkulatora poboljšava učenje kod učenika. Posebno su zapazili poboljšanje razumijevanja aritmetičkih koncepata od strane učenika i poboljšanje njihovih sposobnosti za rješavanje problema. Njihove analize su također pokazale da učenici koji koriste kalkulare poprimaju bolje stavove u odnosu na matematiku i da imaju mnogo bolje samostalne koncepte u matematici nego učenici koji nisu koristili kalkulare. Oni su također našli da učenici koji su koristili kalkulare na nastavi matematike nisu izgubili sposobnosti da pokažu vještine računanja olovkom i papirom.

Istraživanje o korištenju znanstvenih kalkulatora sa mogućnostima grafičkog prikaza je također pokazalo pozitivne efekte na učenikova postignuća. Većina studija je pokazalo pozitivne efekte na učenikove sposobnosti grafičkog prikaza, konceptualno razumijevanje grafikona i njihovu sposobnost da uspostave vezu između grafičkih prikaza i drugih prikaza kao što su tabele i predstavljanje simbolima. Druga područja sadržaja gdje je pokazano poboljšanje kada su ti kalkulatori korišteni uključuju funkcionalne koncepte i prostornu vizualizaciju. Druge studije su pokazale da su učenici bolji rješavatelji problema kada koriste kalkulatore sa mogućnostima grafičkog prikaza. Osim toga, učenici su fleksibilniji u njihovom razmišljanju u odnosu na strategije rješavanja problema, imaju veću ustrajnost i više se fokusiraju da pokušaj da shvate problem konceptualno radije nego da se jednostavno fokusiraju na računanje. Međutim, sa povećanim korištenjem kalkulatora sa mogućnostima grafičkog prikaza, učenici se više vežu za grafičke procedure nego za druge procedure kao što su algebarske metode. Većina studija o kalkulatorima sa grafičkim prikazima je našlo da nema negativnih efekata na bazične sposobnosti, faktično znanje niti na sposobnosti računanja.

Općenito, istraživanje je pokazalo da korištenje kalkulatora mijenja zahtjeve za sadržajem, metodama i sposobnostima u nastavi matematike. Studije su pokazale da nastavnici više postavljaju pitanja višeg nivoa kada se imaju kalkulatori, a učenici kada koriste kalkulatore postaju aktivnije uključeni kroz postavljanje pitanja, naslućivanje i istraživanje.

## **U razredu**

Istraživanje jako podržava poziv koji je izražen u djelu *Kurikulum i standardi evaluacije za nastavu matematike*, koje je objavilo Nacionalno vijeće nastavnika matematike, a koji se odnosi na korištenje kalkulatora u nastavi matematike na svim nivoima. Korištenje kalkulatora na pažljivo planirane načine može kod učenika poboljšati sposobnost rješavanja problema i povećati efektivne rezultate bez gubljenja bazičnih sposobnosti.

Jedna vrijedna upotreba kalkulatora je njihovo korištenje kao alata za istraživanje i otkrivanje u situacijama rješavanja problema i kada se uvodi novi matematički sadržaj. Smanjivanjem vremena za računanje i nudeći neposredni način dolaska do rezultata, kalkulatori pomažu učenicima da se fokusiraju na svoj rad i da provjere svoje metode i rezultate. Kalkulatori sa mogućnostima grafičkog prikaza su posebno korisni za pomoć pri ilustraciji i razvoju grafičkih koncepata i za pravljenje veze između algebarskih i geometrijskih pojmova.

Da bi ispravno pokazali svoje značajne matematičke spobnosti, učenicima bi vjerovatno trebalo dozvoliti da na testovima postignuća koriste svoje kalkulatore. Ako to ne čine, to je glavni prekid kod mnogih učenika da na uobičajen način rade matematiku, i to je nerealna restrikcija jer kada su oni izvan školskog okruženja, oni će zaista koristiti kalkulator u svom svakodnevnom životu i na radnom mjestu. Jedan drugi argument za korištenje kalkulatora je što je učenicima već dozvoljeno da ih koriste na nekim oficijelnim testovima. Osim toga, na nekim ispitima se od učenika traži da koriste kalkulator sa mogućnostima grafičkog prikaza.

**Literatura:** Davis, 1990; Drijvers & Doorman, 1996; Dunham & Dick, 1994; Flores & McLeod, 1990; giamati, 1991; Groves & Stacey, 1998; Harvey, 1993; Hembree & Dessart, 1986, 1992; Mullis, Jenkins & Johnson, 1994; National Council of Teachers of Mathematics, 1989; Peglase & Arnold, 1996; Rich, 1991; Ruthven, 1990; Slavit, 1996; Smith, 1996; Stacey & Groves, 1994; Wilson & Krapfl, 1994.

---

## Zaključci

Ova knjižica je izvadak iz matematičkog poglavlja knjige *Priručnik o istraživanju poboljšanja postignuća učenika*, drugo izdanje. Ona nudi sintezu bazičnog znanja u odnosu na efikasne prakse za poboljšanje nastave i učenja matematike. Ovi materijali su namijenjeni da ih koriste nastavnici, direktori, drugi obrazovni lideri i kreatori politike koji preduzimaju istraživanje radi poboljšanja postignuća učenika.

Prezentirani nalazi istraživanja su namijenjeni da se koriste kao polazna tačka, koja može inicirati razvoj aktivnosti osoblja i pokrenuti diskusiju između edukatora, radije nego recept koji je jednako primjenljiv u svim razredima. Kao što Miriam Met piše u svome poglavlju o stranim jezicima u knjizi *Priručnik o istraživanju poboljšanja postignuća učenika*:

*Istraživanje ne može i ne identificira pravi ili najbolji način podučavanja (...). Ali istraživanje može rasvijetliti koje nastavne prakse najvjerovatnije dovode do postizanja željenih rezultata, sa kojom vrstom učenika, i pod kojim uslovima. (...) Iako istraživanje može usmjeravati u mnoga područja, ono najčešće nudi malo jasnih odgovora. Nastavnici nastavljaju biti svakodnevno suočeni sa kritičnim odlukama kako na najbolji način postići nastavne ciljeve usađene u profesionalne ili dobrovoljne prikaze ili nacionalne standarde. Kombinacija nastavnih praksa koje predlaže istraživanje i profesionalno*

*prosudivanje i iskustvo vjerovatno dovode do produkcije (visokog postignuća učenika).*

Dakle, ova knjižica ne može edukatorima pružiti sve informacije koje im trebaju da bi postali eksperti u nastavnim praksama iz matematike baziranim na istraživanju. Radije su ovi materijali dizajnirani da se koriste kao odskočna daska za diskusije i kasnije istraživanje.

Na primjer, jedan od pristupa profesionalnom razvoju bi mogao biti da se ova knjižica distribuira nastavnicima, da se nađe koji nastavnici već koriste određene prakse, te da im se omogući da oni svoja iskustva demonstriraju svojim kolegama. Zatim bi se mogla formirati studijska grupa za praćenje daljih iščitavanja i diskusija. Opširna lista literature i dodatni resursi dati na kraju bi mogli poslužiti kao polazna tačka. Rad studijske grupe bi se mogao zasnivati na izradi plana i programa razvoja osoblja za slijedeću godinu ili dvije što bi nastavnicima omogućilo da više uče i da postignu dovoljno pouzdanja u korištenju odabranih praksa u svojim razredima.

### **Sugestije korisnika *Priručnika***

Nakon publikovanja prvog izdanja knjige *Priručnik o istraživanju poboljšanja uspjeha učenika*, Služba za obrazovna istraživanja je pitala korisnike kako su im *Priručnik* i odgovarajući materijali pomogli u njihovim naporima da poboljšaju nastavnu praksu. Evo nekoliko njihovih iskustava u korištenju ovih materijala namijenjenih za razvoj osoblja:

- Neki nastavnici su sugerirali da se tokom školske godine na sastancima odsjeka razmotri po jedna praksa mjesečno. Prakse bi obezbijedile fokus za diskusiju, sa nastavnicima koji su već koristili raspoloživu praksu kao resurs, a ti nastavnici bi bili i kao mentori drugim nastavnicima koji su se interesirali za korištenje prakse u svojim razredima. Kao što je jedan nastavnik naveo, "razvoj osoblja neće funkcionirati kada nastavnici *kažu* šta im treba – a kasnije idu dalje samo kritizirajući".
- Jedna škola je izvijestila o korištenju materijala kao resursa kada su se nastavnici sastajali da diskutiraju alternativne pristupe koji bi se mogli koristiti sa učenicima koji se bore. *Priručnik* "je nudio ideje i bio je vodič za korištenje drugih resursa".
- Specijalisti za nastavni plan i program (kurikulum) su zajedno proučavali *Priručnik*, zatim su se sastajali sa nastavnicima po pitanju sadržaja njihovih vlastitih nastavnih područja radi razmatranja sadržaja poglavlja nastavnog područja i ideja koje su razmjenjivane među specijalistima. Od svakog nastavnika je traženo da identificira jednu praksu baziranu na istraživanju koja bi proširila njegov ili njen lični repertoar obrazovnih

strategija i uvela njeno korištenje tokom tri prva mjeseca nastave. Daljne diskusije su vodili nastavnici odgovarajućih nastavnih oblasti i specijalisti, kao i specijalisti koji su se sastajali kao grupa za razmjenu ideja koje su generirali nastavnici sa kojima su oni radili.

- Jedan nastavnik je u svome odgovoru identificirao jednu važnu upotrebu ovih materijala: odrediti validnost obrazovnih praksa koje nastavnici već koriste. Prema njemu, "za nastavnike je važno da znaju šta oni znaju kao i šta oni još uvijek trebaju da nauče".
- Nastavnici u jednom distriktu su pregledali i diskutirali nalaze istraživanja, zatim su dobili obuku i daljnu podršku za strategije za koje su se interesirali.
- Jedna direktorica, dok je izražavala zabrinutost zbog vremena koje nastavnici u njenoj školi provode na fotokopir mašini, uzela je jednu kopiju *Priručnika* sa mašine. Ona je iznijela da nastavnici vole mali format, što im omogućava da brzo pročitaju o jednoj od praksa.
- Jedna druga sugestija koju su učinili nastavnici je bila da se koriste materijali radi pomoći manje iskusnim nastavnicima "da ublaže nedostatak". Iskusniji nastavnici trebaju raditi u saradnji sa njima da bi se pomoglo novim nastavnicima da prošire i rafiniraju svoj repertoar strategija.

### **Kontekst: školska kultura za efikasan razvoj osoblja**

Iskustvo je pokazalo da nastavnicima treba vremena da apsorbiraju nove informacije, razmotre i diskutiraju nove prakse, i da učestvuju u potrebnim obukama da bi pouzdano koristili nove tehnike. Ovo često znači promjene u tradicionalnom predviđanju davanja nastavnicima redovnih prilika za timski rad sa njihovim kolegama, radi sticanja novih sposobnosti i radi držanja nastave. Pošto škole nastavljaju zadatak poboljšanja uspjeha učenika kroz proširivanje osnove znanja nastavnika, potreba restrukturiranja škola postaje sve očitija.

Uspješno korištenje osnove znanja za poboljšanje učenikovog učenja matematike, kao i u slučaju drugih nastavnih predmeta uključenih u *Priručnik*, jako je vezano za efikasan razvoj osoblja. Kao što Dennis Sparks, izvršni direktor Nacionalnog vijeća za razvoj osoblja, kaže u svom poglavlju *Priručnika*:

*Ako nastavnici u svojim razredima trebaju konzistentno da primjenjuju nalaze istraživanja opisanih u ovom Priručniku, od suštinske je važnosti visoko-kvalitetan razvoj osoblja. Ovaj profesionalni razvoj, međutim, mora biti značajno drugačiji od onog kakav se nudio u prošlosti. On se mora odnositi ne samo na znanje, stavove, i praksu pojedinih nastavnika, administratora, i drugih*

*školskih uposlenika, nego on također mora mijenjati kulturu i strukturu organizacija u kojima ti pojedinci rade.*

Potrebne promjene u kulturi razvoja osoblja uključuju: naglašeniji fokus i na organizacioni razvoj i na individualni razvoj, postavljanje pitanja pristupa proučavanja procesa podučavanje/učenje, napore razvoja osoblja koji su u skladu sa jasnim i koherentnim strateškim planovima, veći fokus na potrebe učenika i rezultate učenja, te uvođenje generičkih i sadržajem uslovljenih specifičnih pedagoških sposobnosti.

Sadržaji ove knjižice i *Priručnika o istraživanju poboljšanja uspjeha učenika* mogu pružiti osnovu za dobro dizajnirane aktivnosti razvoja osoblja. Ako škole nastavnicima pruže velikodušne mogućnosti učenja i saradnje, nastavnici mogu i hoće poboljšati podučavanje i učenje na načine koji će zaista koristiti svim učenicima. Da bi se postigao taj cilj, profesionalni razvoj se mora smatrati kao suštinski i neophodan dio procesa unapređenja škole.

## **Dodatni resursi**

### **Resursi na raspolaganju posredstvom Službe za obrazovna istraživanja (Educational Research Service)**

*Priručnik o istraživanju poboljšanja uspjeha učenika* (Handbook of research on improving student achievement), drugo izdanje (207 stranica, plus dodatak). Izdavač je Gordon Cawelti. Ova publikacija nastavnicima, administratorima i drugima daje pristup bazi znanja o nastavnim praksama koje poboljšavaju učenje učenika u svim glavnim nastavnim oblastima od vrtića do kraja srednjeg obrazovanja, uključujući matematiku. *Priručnik*, originalno publikovan 1995. godine, je osavremenjen od strane originalnih autora koji su poštovani autoriteti u njihovim nastavnim oblastima. Temeljiti pregledi zadnjih istraživanja su doveli do dodavanja novih praksa i šireg uvida u postojeće prakse. Dodatak obuhvata prakse zasnovane na istraživanju, a koje se odnose na početnu obuku čitanja.

- ***Poboljšanje uspjeha učenika u matematici*** (knjižica od 28 stranica). Ova knjižica sadrži čitavo matematičko poglavlje knjige *Priručnik o istraživanju poboljšanja učenja učenika*, koju su napisali Douglas A. Grouws i Kristin J. Cebulla. Ona uključuje uvod od Gordona Caweltia i odjel o idejama za proširenje sposobnosti nastavnika da koriste nastavne prakse zasnovane na istraživanju.
- ***Poboljšanje uspjeha učenika u matematici*** (dvije 30-minutne videotrake). Ove videotrake ilustriraju svaku od deset nastavnih praksa

opisanih u matematičkom poglavlju *Priručnika*, koristeći scene iz razreda i intervju sa nastavnicima i školskim administratorima u Cedar Rapids School District-u, Iowa, i u Alexandria City Schools, Virginia. Uvidi nastavnika bazirani na njihovim sadašnjim iskustvima uz korištenje ovih iskustava zasnovanih na istraživanju mogu poslužiti kao odskočna daska za snažne aktivnosti razvoja osoblja koje će potaknuti diskusiju i dalje istraživanje. Deset praksa je prezentirano u posebnim segmentima, dajući korisnicima mogućnost sagledavanja jedne prakse i zatim detaljno razmatranja te prakse prije istraživanja dodatnih praksa.

## **ERS info fajlovi**

Svaki ERS info fajl sadrži 70-100 stranica članaka iz stručnih časopisa, sažetaka istraživačkih studija i odgovarajuće literature koja se odnosi na datu temu, plus navedenu bibliografiju što uključuje pretraživanje Informacionog centra za obrazovne resurse (ERIC-CIJE).

- *Obrazovanje iz matematike i razvoj kurikuluma.* Razmatra implementaciju standarda kurikuluma za matematiku, uključujući modele za integraciju standarda te odgovarajuće uticaje na učenike i nastavnike.
- *Matematička pomagala i kalkulatori.* Opisuje korištenje konkretnih predmeta za podučavanje o matematičkim konceptima. Uključuje sugestije za nastavne materijale, obim korištenja pomagala, strukturiranje pomagala u planiranje nastavnih jedinki i korištenje kompjutera. Diskutira razloge korištenja kalkulatora za podučavanje o matematičkim konceptima.
- *Rješavanje problema u matematici i u nauci.* Razmatra efikasne metode i strategije za podučavanje rješavanja problema od vrtića do 12 razreda. Materijali uključuju ideje za aktivnosti kao i gradiranje metoda.

## **Dodatni izvori informacija**

*Svako dijete je matematički sposobno: akcioni plan.* Ovaj akcioni plan je sačinila alijansa Learning First Alliance, organizacija od dvanaest vodećih nacionalnih obrazovnih asocijacija. Akcioni plan daje preporuke za promjene kurikuluma, inicira profesionalni razvoj, uključivanje roditelja i potiče reforme bazirane na istraživanju. Akcioni plan ima 24 stranice. Cijena je 3.00 US\$. Može se poručiti kod: National Education Association Professional Library. Tel.: (1-800) 229-4200.

*Poboljšanje podučavanja i učenja u nauci i matematici.* Ilustrira kako edukatori u oblasti nauke i matematike mogu upotrijebiti konstruktivističke ideje za istraživanje i dalje poboljšanje matematičke prakse (1996). Na raspolaganju

je kod Teachers college Press, Teachers College, Columbia University, P.O.Box 20, Willinston, VT 05495, USA. Tel.: (1-802) 864-7626.

*Obrazovni programi iz matematike, nauke i tehnologije koji funkcioniraju, i Obećavajuće prakse iz matematike i nauke.* Publikovalo Ministarstvo obrazovanja Sjedinjenih Američkih Država. Prva knjiga opisuje programe Nacionalne mreže za difuziju koja je pri Ministarstvu. Druga opisuje uspješne programe koje je identificirao Ured za istraživanja i unapređenje obrazovanja. Obadvije knjige koštaju 21.00 US\$. Izdanje je pod brojem No. 065-000-00627-8. Može se poručiti kod: Superintendent of Documents, P.O. Box 371954, Pittsburgh, PA 15250-7954, USA. Tel.: (1-202)512-1800; fax:(1-202) 512-2250.

*Standardi kurikuluma i evaluacije za nastavu matematike.* Opisana su pedeset i četiri standarda koje je sačinilo Nacionalno vijeće nastavnika matematike za "kreiranje koherentne vizije matematičke pismenosti i obezbjeđenje standarda radi vođenja revizije kurikuluma matematike za slijedeću dekadu". Standardi su objavljeni 1989, sadrže 258 stranica. Cijena je 25.00 US\$. Mogu se poručiti kod: National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1593, USA. Tel.: (1-703) 620-9840; fax: (1-703) 476-2970.

*Eisenhower Nacionalna ustanova za razmjenu podataka (Državni Univerzitet Ohio).* Dio mreže koju je formiralo Ministarstvo obrazovanja Sjedinjenih Država, koja zajedno sa regionalnim konzorcijem za nauku i matematiku saraduje na identificiranju i širenju uzoraka materijala radi pružanja školama, nastavnicima i administratorima tehničke pomoći o nastavnim metodama i instrumentima, i rada sa drugim organizacijama u pokušaju poboljšanja nastave matematike i nauke. On-line: [www.enc.org](http://www.enc.org).

*Nacionalni centar za poboljšanje učenikovog učenja i postignuća iz matematike i nauke,* Wisconsin Centar za obrazovna istraživanja, Univerzitet Wisconsin-Madison. Publikacije uključuju tromjesečni časopis *Principled practice*, koji razmatra stajališta i brige edukatora o pitanjima nastave matematike i nauke. Na raspolaganju kod: 1025 West Johnson Street, Madison, WI 53706, USA.

Tel.: (1-608) 265-6240; fax: (1-608) 263-3406;

e-mail: [ncisla@mail.soemadison.wisc.edu](mailto:ncisla@mail.soemadison.wisc.edu);

web site: [www.wcer.wisc.edu/ncisla](http://www.wcer.wisc.edu/ncisla)

### **Odgovarajuće web stranice**

- ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education

[www.ericse.org/sciindex.html](http://www.ericse.org/sciindex.html)

- The Regional Alliance for Mathematics and Science Education  
<http://ra.terc.edu/allince/HubHome.html>
- National Council of Teachers of Mathematics  
[www.nctm.org](http://www.nctm.org)

## Literatura

- American Association of University Women. 1998. *Gender gaps: where schools still fail our children*. Washington, DC, AAUW.
- Atanda, D. 1999. *Do gatekeeper courses expand education options?* Washington, DC, National Center for Education Statistics. (NCES 1999303.)
- Aubrey, C. 1997. *Mathematics teaching in the early years: an investigation of teachers' subject knowledge*. London, Falmer Press.
- Ball, D. 1993. With an eye on the mathematical horizon: dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary school journal* (Chicago, IL), vol. 93, p. 373–97.
- Boaler, J. 1998. Open and closed mathematics: student experiences and understandings. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 29, p. 41–62.
- Brownell, W.A. 1945. When is arithmetic meaningful? *Journal of educational research* (Washington, DC), vol. 38, p. 481–98.
- . 1947. The place of meaning in the teaching of arithmetic. *Elementary school journal* (Chicago, IL), vol. 47, p. 256–65.
- Carpenter, T.P., et al. 1988. Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 19, p. 385–401.
- . 1989. Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: an experimental study. *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 26, p. 499–531.
- . 1998. A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 29, p. 3–20.
- Cobb, P.; Yackel, E.; Wood, T. 1992. A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 23, p. 2–23.
- Cobb, P., et al. 1991. Assessment of a problem-centered secondgrade mathematics project. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 3–29.

- . 1992. Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 29, p. 573–604.
- Cognition and Technology Group. 1997. *The Jasper Project: lessons in curriculum, instruction, assessment, and professional development*. Mahwah, NJ, Erlbaum.
- Cohen, E.G. 1994. Restructuring the classroom: conditions for productive small groups. *Review of educational research* (Washington, DC), vol. 64, p. 1–35.
- Davidson, N. 1985. Small group cooperative learning in mathematics: a selective view of the research. In: Slavin, R., ed. *Learning to cooperate, cooperating to learn*, p. 211–30. New York, Plenum Press.
- Davis, M. 1990. *Calculating women: precalculus in context*. Paper presented at the Third Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Columbus, OH, November.
- Drijvers, P.; Doorman, M. 1996. The graphics calculator in mathematics education. *Journal of mathematical behavior* (Stamford, CT), vol. 15, p. 425–40.
- Dunham, P.H.; Dick, T.P. 1994. Research on graphing calculators. *Mathematics teacher* (Reston, VA), vol. 87, p. 440–45.
- Fawcett, H.P. 1938. *The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in senior high school to develop an understanding of the nature of proof*. 1938 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. New York, Columbia University, Teachers College.
- Fennema, E.; Carpenter, T.P.; Peterson, P.L. 1989. Learning mathematics with understanding: cognitively guided instruction. In: Brophy, J., ed. *Advances in research on teaching*, p. 195–221. Greenwich, CT, JAI Press.
- Fennema, E., et al. 1993. Using children's mathematical knowledge in instruction. *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 30, p. 555–83.
- . 1996. A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 27, p. 403–34.
- Flanders, J.R. 1987. How much of the content in mathematics textbooks is new? *Arithmetic teacher* (Reston, VA), vol. 35, p. 18–23.
- Flores, A.; McLeod, D.B. 1990. *Calculus for middle school teachers using computers and graphing calculators*. Paper presented at the Third Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Columbus, OH, November.
- Fuson, K.C. 1992. Research on whole number addition and subtraction. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 243–75. New York, Macmillan.

- Fuson, K.C.; Briars, D.J. 1990. Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 21, p. 180–206.
- Giamati, C.M. 1991. *The effect of graphing calculator use on students' understanding of variations of their graphs*. Doctoral dissertation, University of Michigan. *Dissertation Abstracts International*, vol. 52, 103A. (University Microfilms No.AAC 9116100.)
- Good, T.L.; Grouws, D.A.; Ebmeier, H. 1983. *Active mathematics teaching*. New York, Longman.
- Greeno, J.G. 1991. Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 170–218.
- Grouws, D.A.; Smith, M.S. In press. Findings from NAEP on the preparation and practices of mathematics teachers. In: Silver, E.A.; Kenney, P., eds. *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.
- Groves, S.; Stacey, K. 1998. Calculators in primary mathematics: exploring number before teaching algorithms. In: Morrow, L.J., ed. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*, p. 120–29. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.
- Harvey, J.G. 1993. *Effectiveness of graphing technology in a precalculus course: the 1988–89 field test of the C3PC materials*. Paper presented at the Technology in Mathematics Teaching Conference, Birmingham, UK, September.
- Hawkins, E.F.; Stancavage, F.B.; Dossey, J.A. 1998. *School policies and practices affecting instruction in mathematics: findings from the National Assessment of Educational Progress*. Washington, DC, National Center for Educational Statistics. (NCES 98-495.)
- Heid, M.K. 1988. Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 19, p. 3–25.
- Hembree, R.; Dessart, D.J. 1986. Effects of hand-held calculators in pre-college mathematics education: a meta-analysis. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 17, p. 83–99.
- . 1992. Research on calculators in mathematics education. In: Fey, J.T., ed. *Calculators in mathematics education*. 1992 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, p. 22–31. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.
- Hiebert, J.; Carpenter, T. 1992. Learning and teaching with understanding. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 65–97. New York, Macmillan.

- Hiebert, J.; Wearne, D. 1992. Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 98–122.
- . 1993. Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American educational research journal* (Washington, DC), vol. 30, p. 393–425.
- . 1996. Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and instruction* (Hillsdale, NJ), vol. 14, p. 251–83.
- Hiebert, J., et al. 1997. *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH, Heinemann.
- Husén, T. 1967. *International study of achievement in mathematics*, vol. 2. New York, Wiley.
- Kamii, C. 1985. *Young children reinvent arithmetic: implications of Piaget's theory*. New York, Teachers College Press.
- . 1989. *Young children continue to reinvent arithmetic: implications of Piaget's theory*. New York, Teachers College Press.
- . 1994. *Young children continue to reinvent arithmetic in 3rd grade: implications of Piaget's theory*. New York, Teachers College Press.
- Keeves, J.P. 1976. Curriculum factors influencing school learning. *Studies in educational evaluation* (Kidlington, UK), vol. 2, p. 167–84.
- . 1994. *The world of school learning: selected key findings from 35 years of IEA research*. The Hague, Netherlands, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Kilpatrick, J. 1992. A history of research in mathematics education. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 3–38. New York, Macmillan.
- Knapp, M.S.; Shields, P.M.; Turnbull, B.J. 1995. Academic challenge in high-poverty classrooms. *Phi Delta Kappan* (Bloomington, IN), vol. 77, p. 770–76.
- Koehler, M.; Grouws, D.A. 1992. Mathematics teaching practices and their effects. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 115–26. New York, Macmillan.
- Kulm, G.; Morris, K.; Grier, L. 1999. *Middle grade mathematics textbooks: a benchmarks-based evaluation*. Washington, DC, American Association for the Advancement of Science.
- Labinowicz, E. 1985. *Learning from students: new beginnings for teaching numerical thinking*. Menlo Park, CA, Addison-Wesley.
- Laborde, C. 1994. Working in small groups: a learning situation? In: Biehler, R., et al., eds. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, p. 147–58. Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

- Leinenbach, M.; Raymond, A.M. 1996. A two-year collaborative action research study on the effects of a 'hands-on' approach to learning algebra. *In: Jakubowski, E., ed. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Panama City, FL. (ERIC Document Reproduction; Service No. ED 400 178.)
- Mack, N.K. 1990. Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 21, p. 16–32.
- Markovits, Z.; Sowder, J. 1994. Developing number sense: an intervention study in grade 7. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 25, p. 4–29.
- McKnight, C.C., et al. 1987. *The underachieving curriculum*. Champaign, IL, Stipes.
- Mullis, I.V.S.; Jenkins, F.; Johnson, E.G. 1994. *Effective schools in mathematics: perspectives from the NAEP 1992 assessment*. Washington, DC, United States Department of Education, Office of Educational Research and Improvement. (Report No. 23-RR-01.)
- National Center for Education Statistics. 1996. *Pursuing excellence: a study of U.S. eighth-grade mathematics and science teaching, learning, curriculum, and achievement in international context*. Washington, DC, United States Department of Education. (NCES Report 97-198.)
- . 1997. *Pursuing excellence: a study of U.S. fourth-grade mathematics and science achievement in international context*. Washington, DC, United States Department of Education. (NCES Report 97-255.)
- . 1998. *Pursuing excellence: a study of U.S. twelfth-grade mathematics and science achievement in international context*. Washington, DC, United States Department of Education. (NCES Report 98-049.)
- National Council of Teachers of Mathematics. 1989. *Curriculum and valuation standards for school mathematics*. Reston, VA, NCTM.
- Penglase, M.; Arnold, S. 1996. The graphics calculator in mathematics education: a critical review of recent research. *Mathematics education research journal* (Campbelltown, Australia), vol. 8, p. 58–90.
- Resnick, L.B. 1980. The role of invention in the development of mathematical competence. *In: Kluwe, R.H.; Spada, H., eds. Developmental models of thinking*, p. 213–44. New York, Academic Press.
- Resnick, L.B.; Omanson, S.F. 1987. Learning to understand arithmetic. *In: Glaser, R., ed. Advance in instructional psychology*, vol. 3, p. 41–95. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
- Reys, B.J.; Barger, R.H. 1994. Mental computation: issues from the United States perspective. *In: Reys, R.E.; Nohda, N., eds. Computational alternatives for the twenty-first century*, p. 31–47. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

- Reys, B.J., et al. 1991. *Developing number sense in the middle grades*. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.
- Rich, B.S. 1991. *The effects of the use of graphing calculators on the learning of function concepts in precalculus mathematics*. Doctoral dissertation, University of Iowa. *Dissertation Abstracts International*, vol. 52, 835A. (University Microfilms No. AAC 9112475.)
- Ruthven, K. 1990. The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational studies in mathematics* (Dordrecht, Netherlands), vol. 21, p. 431–50.
- Schmidt, W.H.; McKnight, C.C.; Raizen, S.A. 1997. *A splintered vision: an investigation of U.S. science and mathematics education*. Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- Secada, W.G. 1992. Race, ethnicity, social class, language, and achievement in mathematics. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 623–60. New York, Macmillan.
- Skemp, R.R. 1978. Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic teacher* (Reston, VA), vol. 26, p. 9–15.
- Slavin, R.E. 1990. Student team learning in mathematics. In: Davidson, N., ed. *Cooperative learning in math: a handbook for teachers*, p. 69–102. Reading, MA, Addison-Wesley.
- . 1995. *Cooperative learning: theory, research, and practice*. 2nd edition. Boston, Allyn & Bacon.
- Slavit, D. 1996. Graphing calculators in a ‘hybrid’ algebra II classroom. *For the learning of mathematics: an international journal of mathematics education* (Montreal, Canada) vol. 16, p. 9–14.
- Smith, B.A. 1996. *A meta-analysis of outcomes from the use of calculators in mathematics education*. Doctoral dissertation, Texas A&M University at Commerce. *Dissertation Abstracts International*, vol. 58, 03.
- Sowder, J. 1992a. Estimation and number sense. In: Grouws, D.A., ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 371–89. New York, Macmillan.
- . 1992b. Making sense of numbers in school mathematics. In: Leinhardt, R.; Putnam, R.; Hatrup, R., eds. *Analysis of arithmetic for mathematics education*, p. 1–51. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
- Sowell, E.J. 1989. Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 20, p. 498–505.
- Stacey, K.; Groves, S. 1994. *Calculators in primary mathematics*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Indianapolis, IN, April.
- Stigler, J.W.; Hiebert, J. 1997. Understanding and improving classroom mathematics instruction. *Phi Delta Kappan* (Bloomington, IN), vol. 79, p. 14–21.

- Stigler, J.W., et al. 1999. *The TIMSS videotape study: methods and findings from an exploratory research project on eighth grade mathematics instruction in Germany, Japan, and the United States*. Washington, DC, National Center for Education Statistics. (NCES 99-130.)
- Suarez, T.M., et al. 1991. Enhancing effective instructional time: a review of research. *Policy brief*, vol. 1, no. 2. Chapel Hill, NC, North Carolina Educational Policy Research Center.
- Suydam, M.N.; Higgins, J.L. 1977. *Activity-based learning in elementary school mathematics: recommendations from research*. Columbus, OH, ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Thompson, P.W. 1992. Notations, conventions, and constraints: contributions of effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 23, p. 123–47.
- Van Engen, H. 1949. An analysis of meaning in arithmetic. *Elementary school journal* (Chicago, IL), vol. 48, p. 395–400.
- Varelas, M.; Becker, J. 1997. Children's developing understanding of place value: semiotic aspects. *Cognition and instruction* (Hillsdale, NJ), vol. 15, p. 265–86.
- Wearne, D.; Hiebert, J. 1988. A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: testing a local theory using decimal numbers. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 19, p. 371–84.
- Webb, N.M. 1991. Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 366–89.
- Webb, N.M.; Troper, J.D.; Fall, R. 1995. Constructive activity and learning in collaborative small groups. *Journal of educational psychology* (Washington, DC), vol. 87, p. 406–423.
- Wilson, M.R.; Krapfl, C.M. 1994. The impact of graphics calculators on students' understanding of function. *Journal of computers in mathematics and science teaching* (Charlottesville, VA), vol. 13, p. 252–64.
- Wood, T. 1999. Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 30, p. 171–91.
- Wood, T.; Cobb, P.; Yackel, E. 1995. Reflections on learning and teaching mathematics in elementary school. In: Steffe, L.P.; Gale, J., eds. *Constructivism in education*, p. 401–22. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
- Wood, T.; Sellers, P. 1996. Assessment of a problem-centered mathematics program: 3rd grade. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 27, p. 337–53.
- . 1997. Deepening the analysis: longitudinal assessment of a problem-centered mathematics program. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 28, p. 163–86.

- Wood, T., et al. 1993. Rethinking elementary school mathematics: insights and issues. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), monographs, 6.
- Yackel, E.; Cobb, P.; Wood, T. 1991. Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for research in mathematics education* (Reston, VA), vol. 22, p. 390–408.

## **Međunarodni ured za obrazovanje – IBE**

Međunarodni centar za sadržaj obrazovanja, IBE je osnovan u Ženevi 1925. godine kao privatna institucija. Godine 1929. on postaje prva međuvladina organizacija na polju obrazovanja. U 1969. godini IBE se pridružuje UNESCO-u kao integralna, još uvijek autonomna, institucija.

U sadašnje vrijeme, IBE: (a) uređuje Svjetske podatke o obrazovanju, banku podataka koja predstavlja komparativnu osnovu profila nacionalnih obrazovnih sistema; (b) organizira predavanja o razvoju kurikuluma u zemljama u razvoju; (c) posredstvom svoje INNODATA banke podataka prikuplja i širi značajne inovacije u obrazovanju, (d) koordinira pripremanje nacionalnih izvještaja o razvoju obrazovanja; (e) dodjeljuje Medalju Komenski zaslužnim istaknutim nastavnicima i istraživačima u obrazovanju; i (f) kvartalno publikuje časopis iz obrazovanja – *Pogledi te* kvartalno izdaje novine – *Obrazovne inovacije i informacije*, vodič za strane studente – *Studiranje u inostranstvu*, kao i druge publikacije.

U kontekstu svojih trening seminara o razvoju kurikuluma, Ured uspostavlja regionalne i lokalne mreže za upravljanje promjenama kurikuluma te razvija nove informativne usluge – platformu za razmjenu informacija o sadržaju obrazovanja.

IBE-om upravlja Odbor sastavljen od predstavnika dvadeset i osam država članica, a koje delegira Generalna konferencija UNESCO-a.

**[http:// www.ibe.unesco.org](http://www.ibe.unesco.org)**